

Esercitazione sugli integrali indefiniti

Due particolari integrali di funzioni periodiche goniometriche

1. $\int \sqrt{1-\cos x} dx$, limitatamente all'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$
2. $\int \sqrt{1-\sin x} dx$, limitatamente all'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$

Elaborazioni

1. $\int \sqrt{1-\cos x} dx$ Si tratta di un integrale di una funzione periodica di periodo $T=2\pi$. La precisazione dell'intervallo $[0;2\pi]$ in cui considerare la funzione è opportuna come si osserverà tra breve.

Ricordando la **formula di bisezione** $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, osserviamo che per $0 \leq x \leq 2\pi$ risulta

$0 \leq \frac{x}{2} \leq \pi$ e perciò si ha $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$, quindi $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$. Facciamo notare a questo punto che se si fosse scelto un altro intervallo di variabilità per x , per esempio $[-2\pi;0]$, si avrebbe avuto $-\pi \leq \frac{x}{2} \leq 0$, dove risulta $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq 0$ e dunque anche $\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = -\sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Procediamo con il calcolo dell'integrale assegnato con $x \in [0;2\pi]$.

$$\int \sqrt{1-\cos x} dx = \sqrt{2} \int \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} dx = \sqrt{2} \int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = -2\sqrt{2} \int -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = -2\sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

A proposito dell'eventuale scelta dell'intervallo $[-2\pi;0]$ per la variabilità di x , l'integrale esaminato avrebbe dato come risultato

$$\int \sqrt{1-\cos x} dx = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Riportiamo in Figura 1 parzialmente il diagramma della funzione integranda

$$f(x) = \sqrt{1-\cos x}$$

osservato in particolare nell'intervallo $[-2\pi;2\pi]$.

E' evidente la periodicità di periodo $T=2\pi$.

In Figura 2 sono evidenziati nello stesso intervallo $[-2\pi;2\pi]$ il diagramma della funzione integranda, quello della sua primitiva

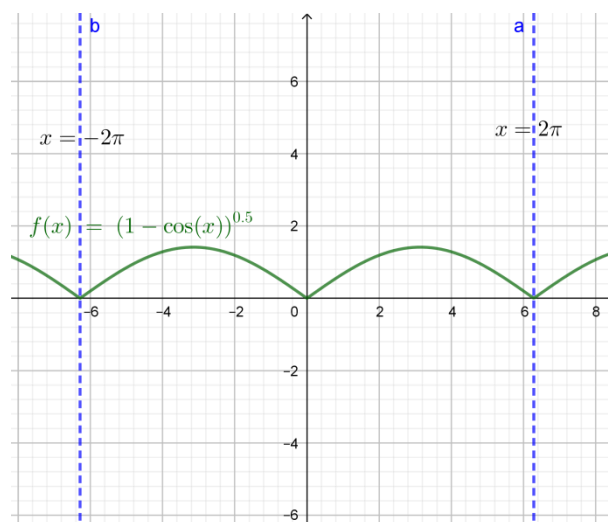


Figura 1-Diagramma della funzione periodica $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$

$$h(x) = -2\sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

determinata per l'intervallo $[0; 2\pi]$ e quello della derivata prima $h'(x)$ di quest'ultima (in stile tratteggio). Si noti che il diagramma di $h'(x)$ coincide con quello di $f(x)$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$ ma non nell'intervallo $[-2\pi; 0]$; infatti in $[-2\pi; 0]$ il diagramma della funzione $f(x)$ coincide con il diagramma della funzione opposta di $h'(x)$, che è evidentemente la derivata prima della funzione

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

2. $\int \sqrt{1 - \sin x} dx$ Possiamo scrivere la funzione integranda in modo diverso utilizzando l'uguaglianza $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ valida per ogni x reale; si ha dunque l'integrale $\int \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx$. Operiamo la sostituzione

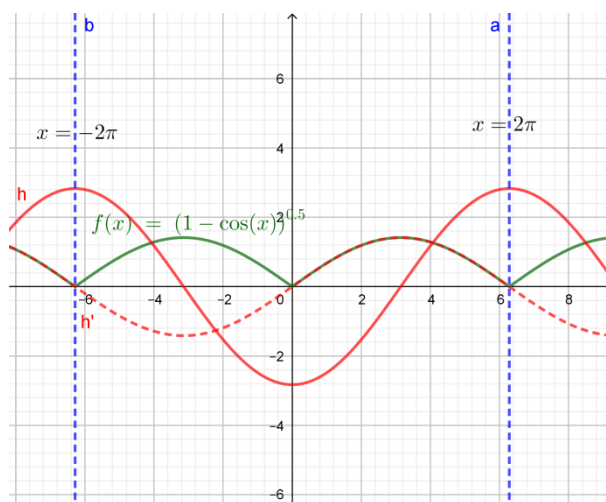


Figura 2

di variabile $\frac{\pi}{2} - x = t$, da cui si ha $x = \frac{\pi}{2} - t$ e $dx = -dt$. L'integrale assume la forma seguente:

$$\int \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx = \int \sqrt{1 - \cos(t)} \cdot (-dt) = -\int \sqrt{1 - \cos(t)} dt \quad (2.1)$$

A parte il segno, ci siamo praticamente ricondotti all'integrale $\int \sqrt{1 - \cos x} dx$ affrontato nel precedente punto (1). Osserviamo, però, che la condizione $0 \leq x \leq 2\pi$ implica per la nuova variabile t la limitazione $-\frac{3\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, quindi anche $-\frac{3\pi}{4} \leq \frac{t}{2} \leq \frac{\pi}{4}$. Per calcolare l'integrale indefinito in oggetto ricorreremo ancora alle formule di bisezione, ma sarà necessario distinguere due casi.

Primo caso

Per $-\frac{3\pi}{4} \leq \frac{t}{2} \leq 0$ si ha $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \leq 0$, quindi $\sin\left(\frac{t}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} \rightarrow -\sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right)$

L'integrale in (2.1) si calcola come segue:

$$\begin{aligned} -\int \sqrt{1 - \cos(t)} dt &= \int \sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -2\sqrt{2} \int -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) + C = \\ &= -2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C \end{aligned} \quad (2.2)$$

Secondo caso

Per $0 < \frac{t}{2} \leq \frac{\pi}{4} \rightarrow \sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$, quindi $\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} \rightarrow \sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

Per l'integrale (2.1) si ha

$$-\int \sqrt{1-\cos(t)} dt = -\int \sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2\sqrt{2} \int -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) + C =$$

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C \quad (2.3)$$

Conclusione

Scriviamo l'espressione di una primitiva $F(x)$ della funzione integranda nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

Se $-\frac{3\pi}{4} \leq \frac{t}{2} \leq 0$, quindi se $-\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 0$, cioè se $-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 0$, e dunque se $\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$, scegliendo (momentaneamente) per la costante additiva reale C il valore 0 (zero), si ha la funzione primitiva $F(x) = -2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Se $0 < \frac{t}{2} \leq \frac{\pi}{4}$, dunque se $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$, e quindi se $0 < \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$, cioè se $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, poniamo ancora uguale a zero la costante additiva C ; si ha la così la funzione primitiva $F(x) = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

In sintesi la funzione $F(x)$ in oggetto è:

$$F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Osserviamo ora che la funzione così ottenuta non è continua. Infatti, si riconosce che nel punto $x = \pi/2$ presenta una discontinuità di 3° specie come si deduce studiando i due limiti laterali $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ e $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$:

lateralmente $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ e $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2\sqrt{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} -2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

quindi vi è il salto finito $\sigma = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} F(x) - \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} F(x) = -4\sqrt{2}$

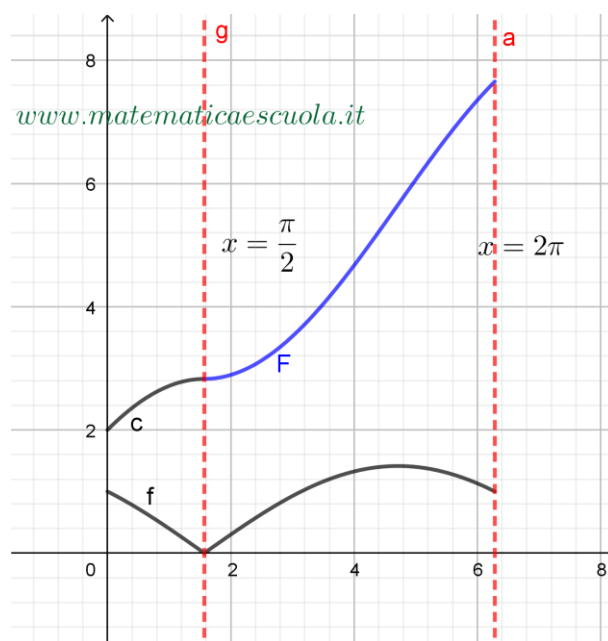


Figura 3- Diagrammi relativi all'intervallo $[0; 2\pi]$ della funzione integranda $f(x) = \sqrt{1-\sin x}$ e della sua primitiva indicata in (2.4).

Ricordiamo a questo punto che la funzione integranda $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$ è continua e periodica di periodo $T=2\pi$ ed ogni sua primitiva è continua e derivabile in tutto il dominio di definizione della f , in particolare deve essere derivabile e quindi continua⁽¹⁾ la funzione $F(x)$ che stiamo determinando. Si risolve la difficoltà intervenendo sul valore della costante additiva C che in precedenza è stata assunta uguale a zero nelle due espressioni ottenute per gli insiemi delle primitive nei due intervalli in cui si è operato. Ebbene, per ottenere una primitiva continua e derivabile in tutto l'intervallo $[0; 2\pi]$ basta modificare la funzione $F(x)$ riportata sopra in uno dei due intervalli; decidiamo di modificarla nell'intervallo $[\pi/2; 2\pi]$ scegliendo per la costante C che compare nell'espressione (2.2) il valore $4\sqrt{2}$. La funzione che si ottiene è la seguente:

$$F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + 4\sqrt{2} & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad (2.4)$$

Il lettore verifichi che la funzione riportata nell'intervallo $[0; 2\pi]$ è continua e derivabile e coincide con la funzione integranda $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$.

⁽¹⁾ Ricordiamo l'importante teorema: "Ogni funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, derivabile in A è ivi anche continua".